

## Полиноми

1. Полином $p(x)$ при дељењу са $x - 1$ даје остатак 3, а при дељењу са $x - 2$ остатак 4. Колики је остатак при дељењу са $(x - 1)(x - 2)$ ?
2. Ако полином $p(x)$ при дељењу са $x - 1$ даје остатак 3, а при дељењу са $x + 1$ остатак 1, наћи остатак при дељењу $p(x)$ са $x^2 - 1$ .
3. Наћи остатак при дељењу полинома $p(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$ са $x^3 - x$ .
4. Наћи све вредности реалних параметара $a$ и $b$ за које је полином $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ потпун квадрат неког полинома.
5. Наћи све природне бројеве $n$ такве да је полином $p(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ дељив са $x^2 + x + 1$ .
6. Наћи све природне бројеве $n$ такве да је полином $p(x) = x^{2n} + x^n + 1$ дељив са $x^2 + x + 1$ .
7. Доказати да је полином $p(x) = nx^{n+1} - (1 + n\alpha)x^n + (\alpha - 1)(x^{n-1} + \dots + x) + \alpha$ дељив полиномом $q(x) = x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha$ . Посебно испитати случај када је $\alpha = 1$ .
8. Познато је да полином $p(x) = 9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6$ има нулу $x_1 = -i3^{1/2}$ . Одредити остале нуле полинома.
9. Одредити полином $p(x)$ четвртог степена који има реалне коефицијенте, двоструку нулу $-2$ , једноструку нулу $1 - 2i$ и за који је $p(-3) = 20$ .
10. Дат је полином $3x^4 + px^3 + qx^2 + 4x - 2$ , $p, q$ су реални бројеви. а) Одредити $p$ и $q$ тако да је $x_1 = 1 + i$ једна нула полинома. б) Одредити остале нуле полинома.
11. Одредити све вредности броја $a$ за које корени полинома $x^3 - 6x^2 + ax + a$ задовољавају релацију $(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$ .
12. Решити једначину $x^3 - 3 \cdot 3^{1/2} x^2 + 7x - 3^{1/2} = 0$ ако је познато да се два њена корена разликују за $2^{1/2}$ .
13. Доказати да је полином $p(x) = (\cos\varphi + x \sin\varphi)^n - \cos(n\varphi) - x \sin(n\varphi)$ дељив са $x^2 + 1$ .
14. Колики је остатак при дељењу полинома $p(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7$ са $x + 2 + i$ ?
15. Наћи коефицијенте $a, b, c, d$ код полинома $p(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c$ знајући да при дељењу са $x^2 + d$ $p(x)$ даје остатак $x$ , а при дељењу са $x^2 - d$ , остатак $-x$ .

## Рационални алгебарски изрази

1. Користећи разне методе раставити на чиниоце следећи полином $a^3 - 4a^2b + 4ab^2 - a$ .
2. Користећи разне методе раставити на чиниоце следећи полином $4a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 - 4b^2$ .

3. Користећи разне методе раставити на чиниоце следећи полином $x^3 - y^3 - x^2 + y^2$ .
4. Користећи разне методе раставити на чиниоце следећи полином $x^3 + y^3 - x^2 + y^2$ .
5. Скратити следећи разломак и написати услове под којима добијена једнакост важи $\frac{a^3 b^4 + 2a^2 b^4}{ab^3(a^2 + 4a + 4)}$
6. Скратити следећи разломак и написати услове под којима добијена једнакост важи $\frac{ab + ac - c^2 - bc}{bc + c^2 + 2ab + 2ac}$
7. Скратити следећи разломак и написати услове под којима добијена једнакост важи $\frac{(x^2 + xy)^2 - (xy + y^2)^2}{(x^2 - xy)^2 - (xy - y^2)^2}$
8. Скратити следећи разломак и написати услове под којима добијена једнакост важи $\frac{(xy + 1)^2 - (x + y)^2}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}$
9. Средити дати израз $\left(\frac{(2a^2)^2}{3a^4 b^3}\right)^3 \cdot \frac{27a^2 b}{64a^{10}}$
10. Средити дати израз $\frac{15(a^3 b^{n+2})^2}{7a^n b^5} \div \frac{(3a^{n-1} b)^2}{21a^n b^{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$
11. Средити дати израз $\left[\frac{(a+b)^3}{3ab} - (a+b)\right] \div \left(1 + \frac{(a-b)^2}{ab}\right).$
12. Средити дати израз $\left[\frac{2x}{x^2 + 2xy} + \frac{4y}{x^2 - 4y^2} - \frac{y}{xy - 2y^2}\right] \div \left(1 - \frac{x^2 - 4y^2 - 2}{x^2 - 4y^2}\right).$
13. Средити дати израз

$\frac{1+a}{1-x^2} \cdot \frac{(a+x)^2 - (1+ax)^2}{a^2 - a}$
14. Средити дати израз $\frac{x^3 + yx}{x^4 - y^4} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$
15. Средити дати израз $\frac{2x^2y^3 - 2x^3y^2}{4x^2y^2} \cdot \frac{3x}{(x-y)^2}$

### Биномни образац. Елементи комбинаторике.

1. Израчунати суму $\sum_{i=1}^n i \cdot \binom{n}{i} \quad n \in N.$
2. Израчунати суму $\sum_{i=0}^n (i+1) \cdot \binom{n}{i} \quad n \in N.$
3. Израчунати суму $\sum_{i=0}^n (k+i) \cdot \binom{n}{i} \quad k, n \in N.$
4. Израчунати суму $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \quad n \in N.$
5. Израчунати суму $\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} \binom{n}{i+2} \quad n \in N.$
6. Одредити члан који у биномном развоју $\left( \sqrt[4]{a^2x} + \sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}} \right)^{13}$ не садржи $x$ .
7. Наћи чланове у развоју $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$ који нису ирационални.
8. Збир трећег од почетка и трећег од краја биномних коефицијената у

<p>развоју <math>(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n</math> <math>n \in N</math>, једнак је 9900. Колико има рационалних чланова у овом развоју?</p>
<p>9. Одредити коефицијент уз <math>x^3</math> у развијеном изразу <math>\sum_{i=3}^{15} (1+x)^i</math>.</p>
<p>10. У развоју бинома <math>(\sqrt[3]{x^2} + \frac{y}{x})^n</math> (<math>x \neq 0</math>), (<math>n \in N</math>), одредити члан који не садржи <math>x</math> ако је биномни коефицијент трећег члана већи за 5 од биномног коефицијента другог члана.</p>
<p>11. У осам четворокреветних соба треба разместити 32 особе. На колико начина се ово може направити (сви гости и све собе су равноправне)?</p>
<p>12. На свакој од две палубе на броду ради по четири морнара. На колико начина се могу изабрати морнари за рад на броду, ако постоји 31 кандидат, од којих 10 желе да раде на горњој палуби, 12 на доњој, а деветорици је свеједно где би радили.</p>
<p>13. У аутобусу који стаје на 4 станице налази се 12 путника. На колико начина путници могу изаћи на те четири станице у зависности само од броја њих који излазе на различитим станицама.</p>
<p>14. На свакој страници квадрата задате су по четири произвољне тачке од којих ниједна није теме квадрата. Колико има троуглова чија су темена задате тачке?</p>
<p>15. На колико начина се кутија са 20 цигарета може поделити између четири пушача тако да свако од њих добије бар по једну цигарету?</p>
<p>16. У скупу од 100 тачака има тачно 20 тројки колонеарних тачака. Колико највише правих одређулу тачке овог скупа.</p>
<p>17. Колико има различитих четвороцифрених бројева дељивих са 5 записаних помоћу цифара 0,1,2,3,4,5 ако: А) ниједан број не садржи једнаке цифре Б) цифре се могу и понављати?</p>
<p>18. Познато је да крокодил има највише 68 зуба. Доказати да међу <math>16^{17}</math> крокодила не морају да постоје два са истим распоредом зуба.</p>
<p>19. Колико има троцифрених бројева који се могу образовати од цифара 1,3,5,7,9?</p>
<p>20. Четири куглице се убацују у три кутије, тако да нека кутија може бити и празна. Колико има различитих распореда?</p>
<p>21. Израчунати збир <math>S_n = \sum_{i=1}^n i \cdot i!</math>.</p>
<p>22. Колико има пермутација бројева 1,2,3,4,5,6,7,8,9 тако да јединица није на првом месту, двојка није на прва два места, а тројка није на прва три места?</p>
<p>23. На колико начина се могу на првом реду шаховске табле распоредити 2 топа, 2 коња, 2 ловца, Краљ и Дама.</p>
<p>24. Ако скуп А има <math>n</math> елемената, колико има бинарних операција тог скупа?</p>

25. На колико начина се на шаховску таблу може поставити 8 различитих топова тако да се никоја два међусобно не туку (никоја две се не налазе у истој врсти или истој колони).
26. На колико начина се 45 књига може поделити на три полице, тако да на свакој полици буде по 15 књига?
27. Колико се петоцифрених бројева може образовати од цифара 0,1,2,5,7,9 тако да се нула не налази ни на првом ни на последњем месту и да се ниједна цифра не понавља?
28. Из групе од 7 мушкараца и 4 жене треба изабрати 6 особа тако да међу њима буду бар две жене. На колико начина се то може учинити?
29. На полици се налази 12 књига. На колико начина је могуће изабрати 5 од њих а да никоје две од изабраних нису једна до друге?
30. На колико начина се може комплет од 52 карте поделити на два једнака дела, тако да се у сваком делу налазе по две даме?

### Аритметички и геометријски низ

1. За аритметички низ са општим чланом $a_n$ важи $a_2 - a_6 + a_4 + 7 = 0$ и $a_8 - a_7 - 2a_4 = 0$ . Израчунати први члан и разлику овог низа.
2. Написати прва три члана аритметичког низа, ако је за сваки природан број $n$ збир $S_n$ његових првих $n$ чланова једнак $S_n = 4n^2 - 3n$ .
3. Наћи растући аритметички низ у коме је збир прва три члана 27, а збир њихових квадрата 275.
4. Збир трећег и деветог члана аритметичког низа је 8. Израчунати збир првих једанаест чланова тога низа.
5. Одредити вредност реалног броја $a$ тако да $a+1$ , $2a+3$ и $6a-1$ буду три узастопна члана аритметичког низа.
6. Између бројева 3 и 17 уметнути 6 бројева тако да они са датим бројевима образују аритметички низ.
7. Дужине страница правоуглог троугла образују аритметички низ. Површина троугла је $24 \text{ cm}^2$ . Одредити дужине страница.
8. Бројеви $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ образују аритметички низ. Ако је збир свих чланова са непарним индексима једнак 320, а збир свих чланова са парним индексима једнак 350, израчунати $a_{11}$ .
9. Збир три узастопна члана неког растућег аритметичког низа је 3, а збир њихових кубова је 4. Одредити те чланове.
10. Наћи све аритметичке низове код којих је збир $S_n$ првих $n$ чланова једнак $n^2$ .
11. Наћи аритметички низ $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ ако је познато да је $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ и $a_1 a_3 a_5 = 80$ .
12. Колико бројева треба уметнути између бројева 16 и 250 да би се добио аритметички низ чији је збир чланова 1995?
13. Између $9x+y$ и $x+9y$ уметнути 7 израза који са датим изразима представљају аритметички низ.
14. Одредити вредности реалних бројева $x$ и $y$ тако да $2x-y$ , $x+2y-5$ , $x+y$ , $4x-3y+8$ буду узастопни чланови аритметичког низа.
15. Три броја образују геометријски низ чији је збир 65. Ако се средњи члан увећа за 10 низ постаје аритметички. Одредити тај низ.

16. Збир првог и трећег члана растућег геометријског низа је 20, а збир прва три члана је 26. Наћи његов први члан и количник.
17. Сви чланови неког геометријског низа су позитивни. Ако је разлика првог и петог члана једнака 15, а збир првог и трећег члана једнак 20, наћи збир првих пет чланова тог низа.
18. Збир три броја који образују растући геометријски низ је 21, а збир њихових реципрочних вредности је $\frac{7}{12}$ . Наћи те бројеве.
19. Три броја, чији је збир 26, образују геометријски низ. Увећа ли се средњи члан за 4, добија се аритметички низ. Који су то бројеви?
20. Низ бројева 1,8,22,43,... има својство да разлике његових узастопних чланова образују аритметички низ 7,14,21, ...Посматраном низу припада број 35351. Одредити његов индекс.
21. Збир три узастопна члана геометријског низа је 13, а збир њихових квадрата је 91. Одредити те чланове.
22. Три реална броја различита од нуле образују аритметички низ, а квадрати тих бројева, у истом поретку, образују геометријски низ. Одредити количник тог геометријског низа.
23. Израчунати збир $S_n = \sum_{i=0}^n (2i+1) \cdot q^i$ .
24. Израчунати збир $S_n = \sum_{i=0}^n (i+1) \cdot x^i$ .
25. Израчунати збир $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{2^i}$ .
26. Израчунати збир $S_n = \sum_{i=0}^n (i+1)^2 \cdot q^i$ , $q \neq 1$ .
27. Израчунати збир $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{3^i}$ .
28. Израчунати збир $S_n = \sum_{i=1}^n (3 \cdot 2^{i-1} - 1)$ .
29. Израчунати збир $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{i + 2^{i+1}}{2}$ .
30. Три броја образују геометријски низ. Ако се други члан повећа за 8, низ постаје аритметички. Ако се затим последњи члан овог аритметичког низа повећа за 64, добија се опет један геометријски низ. Одредити три поменута броја.

## Функције

1. Одредити највећу вредност функције $y = \sin 2x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ .
2. Одредити највећу вредност функције $y = \frac{x}{ax^2 + b}$ $a > 0, b > 0$ .
3. Наћи све вредности $x$ за коју функција $y = \sin x - \cos^2 x - 1$ добија најмању вредност.
4. Наћи све вредности $x$ за коју функција $y = \frac{1+x^2}{1+x}$ , $x \geq 0$ , добија најмању

вредност.

5. Одредити асимптоте графика следеће функције  $y = \frac{x^3 - 5}{3 - x^2}$ .

6. Одредити асимптоте графика следеће функције  $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$ .

7. Одредити асимптоте графика следеће функције  $y = \frac{x-2}{e^{\frac{1}{x}}}$ .

8. Одредити асимптоте графика следеће функције  $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ .

9. Одредити следећу граничну вредност  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin x}$ .

10. Одредити следећу граничну вредност  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$ .

11. Одредити следећу граничну вредност  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ .

12. Одредити следећу граничну вредност  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x-x}}$ .

13. Одредити област дефинисаности функције  $y = \sqrt{\frac{x^2 + 3x - 4}{6 - x - x^2}}$ .

14. Одредити област дефинисаности функције  $y = \frac{2 + \sqrt{x-1}}{\ln(2-x)}$ .

15. Одредити област дефинисаности функције  $y = \sqrt{\sin \frac{1}{x}}$ .